©*школа Опойцева* 2015

Игрушечная модель выводит мысль
из состояния замешательства
и даёт импульс
в продуктивном направлении.

ЛА.2. *ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ И ВЕКТОРЫ*

Изучать линейную алгебру целесообразно, имея в голове хоть какие-то содержательные задачи. Дабы абстрактная мысль могла время от времени на что-либо опираться.

Линейная модель производства. Пусть x_j обозначает интенсивность j-го технологического процесса, a_{ij} — количество i-го продукта, производимого ($a_{ij} > 0$) или потребляемого ($a_{ij} < 0$) при единичной интенсивности j-го технологического процесса. Тогда суммарное производство (потребление) i-го продукта определяется суммой

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

На этом фоне возможны задачи оптимизации типа $\sum_i c_i y_i \to \max$.

Межотраслевой баланс. Имеется n отраслей, i-я отрасль выпускает i-й продукт в количестве x_i. На выпуск единицы i-го продукта в системе затрачивается $a_{ij} \geqslant 0$ единиц j-го продукта. Понятно, что при выпуске набора

$$x = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

чистый выпуск i-го продукта равен $y_i = x_i - \sum_j a_{ij} x_j$. Вопрос о продуктивности модели, таким образом, сводится к положительной разрешимости системы уравнений[1]

$$x_i - \sum_j a_{ij} x_j = y_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

[1]То ли при любом, то ли при некотором наборе $y > 0$. Оказывается, существование продуктивного плана $x > 0$ при некотором $y > 0$ — достаточно для существования решения $x \geqslant 0$ при любом $y \geqslant 0$.

Пассажиропотоки. В городе имеется n районов, P_i — число жителей i-го района, W_j — число работающих в j-м районе, наконец, x_{ij} — число живущих в i-м районе и работающих в j-м. Очевидно,

$$\sum_j x_{ij} = P_i, \qquad \sum_i x_{ij} = W_j.$$

Интересно, что здесь n^2 неизвестных, и только $2n$ уравнений. Но система решается практически точно (!)[2].

Векторы

При изучении вектор-функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ набор

$$x = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

называют *вектором*, мысленно откладывая $x_1, \ldots, x_n$ по координатным осям «выдуманного» пространства.

Аналогия с обычным представлением о векторах становится осмысленной при подходящем определении операций:

- *умножение на скаляр* λ,

$$\lambda x = \{\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n\}, \tag{2}$$

- *сложение*,

$$x + y = \{x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n\}, \tag{3}$$

- *скалярное произведение*,

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \tag{4}$$

эквивалентные обозначения: (x, y) и xy.

[2]См. *Босс В.* Лекции по математике. *Оптимизация* – том 7. Изд. 4-е, М.: URSS, 2013.

С помощью скалярного произведения вводится *евклидова норма (длина вектора)*,

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{x^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}\,.$$

Множество векторов, на которых введены перечисленные операции, называют n-мерным евклидовым пространством и обозначают $\mathbb{R}^n$.

Операции (2)—(4) представляют собой обобщения аналогичных понятий в $\mathbb{R}^3$. Покоординатное сложение (3) в $\mathbb{R}^3$ равносильно определению суммы векторов по правилу параллелограмма. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ изначально иногда определяется как произведение длин векторов на косинус угла между ними, но потом выясняется, что формула (4) при $n = 3$ дает то же самое. В общем случае такая интерпретация может быть сохранена благодаря известному *неравенству Коши–Буняковского*[3]

$$\boxed{x \cdot y \leqslant \|x\| \cdot \|y\|}\,, \tag{5}$$

которое даёт возможность ввести понятие косинуса угла между векторами при любом n,

$$\cos\varphi_{xy} = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}\,. \tag{6}$$

Линейная независимость и базис. Множество векторов[4] $\{\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_k}\}$ *линейно зависимо*, если существуют такие

[3]Неравенство (5) доказывается совсем просто. Раскрывая скобки в очевидном неравенстве $(x - \lambda y)^2 \geqslant 0$, имеем $\lambda^2\|y\|^2 - 2\lambda xy + \|x\|^2 \geqslant 0$ для любого λ, — что возможно лишь при неположительности дискриминанта квадратного многочлена — а это и есть (5).

[4]Векторы с индексом выделяются жирным шрифтом, чтобы отличить их от координат.

коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, *не все равные нулю*, что

$$\lambda_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x_k} = 0.$$

В противном случае говорят о ***линейной независимости*** элементов[5] $\{\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_k}\}$. *Коллинеарные* векторы[6], например, — линейно зависимы.

Если $u = \lambda_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x_k}$, то говорят, что вектор u — *линейная комбинация* векторов $\{\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_k}\}$. Совокупность всевозможных

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x_k}$$

считают *линейной оболочкой* множества $\{\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_k}\}$. Линейная оболочка представляет собой *линейное пространство P, натянутое на* $\{\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_k}\}$. Характеристическое свойство P:

$$x, y \in P \quad \Rightarrow \quad \alpha x + \beta y \in P.$$

Линейно независимое множество $\{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ называют *базисом*, если любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде линейной комбинации[7]

$$\boldsymbol{x} = x_1 \mathbf{e_1} + \cdots + x_n \mathbf{e_n}.$$

Величины $x_1, \ldots, x_n$ именуют *координатами* точки $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Стандартный базис $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

[5]Элемент и точка — употребляются как синонимы вектора.

[6]Коллинеарными называют векторы, лежащие на одной прямой, т.е. векторы, которые одинаково или противоположно направлены.

[7]То есть $\mathbb{R}^n$ натянуто на свой базис.

Число n векторов, составляющих базис (и не зависящее от выбора последнего), называют *размерностью* пространства. *Любые n линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$ могут служить базисом.*

Упражнения.

- Если множество векторов $\{\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_m}\}$ составляет базис $\mathbb{R}^n$, то $m = n$.
- Множество

$$\mathbf{f_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{f_n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

является базисом в множестве векторов вида $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Ортогональность. Векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ определяют как *ортогональные*, если их скалярное произведение равно нулю, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$. Важная роль ортогональности заключена в том, что с её помощью определяется понятие *плоскости* $P_{\boldsymbol{a}}$, как множества элементов $\boldsymbol{x}$, ортогональных вектору $\boldsymbol{a}$,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 0, \qquad \text{т. е.} \qquad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Понятно, что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P_{\boldsymbol{a}}$ влечёт за собой $\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in P_{\boldsymbol{a}}$.

Описанная стартовая позиция представляет собой упрощённый взгляд на предмет — достаточный для понимания основных результатов линейной алгебры при некотором поэтапном расширении угла зрения. Важно лишь, чтобы для необходимых дополнений были открыты «форточки».